ÉCOLE NAVALE

Concours 1986

Deuxième composition de mathématiques

L'espace affine euclidien de la géométrie habituelle dans lequel on travaille est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Sur la nappe de cône (S) définie par :

$$z^2 = 4(x^2 + y^2) \quad , \quad z \geqslant 0,$$

est tracée une courbe (C) telle que, l'angle α que fait la tangente à (C) en un de ses points M, avec la génératrice du cône passant par M, soit donné par :

$$\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad , \quad \tan \text{ désigne la fonction tangente.}$$

Pour définir M, on utilisera les coordonnées cylindriques habituelles ρ et θ.

1° a) Écrire l'équation différentielle liant ρ et $\frac{d\rho}{d\theta}$.

1° b) Exprimer ρ en fonction de θ, sachant que le point M_0, de coordonnées (1, 0, 2) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, appartient à (C), et est obtenu pour $\theta = 0$. Déduire de ces résultats une représentation paramétrique de (C).

1° c) Exprimer, dans une base de $\mathbb{R}^3$, de votre choix, les vecteurs $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ du repère de FRENET en M à la courbe (C) ; en notant s l'abscisse curviligne de M sur (C), on choisira :

$$\frac{ds}{d\theta} > 0$$

Exprimer la courbure et la torsion en M de (C), on choisira la torsion égale à l'opposé du produit scalaire du vecteur normal principal $\vec{N}$ et de la dérivée du vecteur binormal $\vec{B}$ par rapport à l'abscisse curviligne s de M.

2°) Soit P le point défini par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + a\vec{T} + b\vec{N},$$

a et b étant deux fonctions de classe C^2 de l'abscisse curviligne s de M sur (C), telles que la tangente à la courbe (H), ensemble des points P, soit parallèle à la binormale en M à (C) ; si s_1 désigne l'abscisse curviligne de P sur (H), on écrira :

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{ds_1} = \vec{T}_1 = \vec{B}$$

2° a) Déduire de la relation ci-dessus, l'équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre, que satisfont a, $\frac{d^2a}{d\theta^2}$ et θ ; en déterminer la solution générale puis la solution particulière qui vérifie les conditions :

$$\text{si } \theta = 0 \quad , \quad a = -\frac{27}{29} \quad \text{et} \quad \frac{da}{d\theta} = -\frac{27}{58}.$$

2° b) Utilisant la solution particulière $a(\theta)$ demandée à la question précédente, déterminer la fonction $b(\theta)$ qui lui correspond.

2° c) Déduire des résultats obtenus une représentation paramétrique de la courbe (H_1) ensemble des points P pour la solution particulière $a(\theta)$ obtenue au 2° a).

Cette courbe (H_1) est tracée sur une surface de révolution (S_1) d'axe $(O, \vec{k})$; donner l'équation cartésienne de cette surface (S_1).

Vérifier que la tangente à (H_1) en un quelconque de ses points P, fait un angle constant avec la génératrice de (S_1) contenant le point P.